DS n°1 : Logique – Corrigé

Noté sur 100 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/95.

Exercice 1 : Logique et quantificateurs

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si l'assertion est vraie, on la démontrera rigoureusement. Si l'assertion est fausse, on écrira puis on démontrera sa négation.

/2 **1)** $P : \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(y) \neq 0$

On affirme que P est fausse. On a

$$\text{non}P : \exists y \in \mathbb{R} \qquad f(y) = 0$$

On pose $y = 0$. Alors $f(y) = 0^2 = 0$. Ainsi, non$P$ est vraie, donc P est $\boxed{\text{fausse}}$.

/4,5 **2)** $Q : \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(y) \implies x = y$

On affirme que Q est fausse. On a

$$\text{non}Q : \exists x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$$

On pose $x = 1$ et $y = -1$. Alors $f(x) = 1 = f(y)$ et $x \neq y$. Ainsi, non$Q$ est vraie, donc Q est $\boxed{\text{fausse}}$.

/4,5 **3)** $R : \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = y$

On affirme que R est vraie. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On pose $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = x^2 = y$$

On a donc montré que R est $\boxed{\text{vraie}}$.

/6 **4)** $S : \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (f(x) = f(xy)) \implies (y = 1 \text{ ou } y = -1)$

On affirme que S est fausse. On a

$$\text{non}S : \exists x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(xy) \text{ et } y \neq 1 \text{ et } y \neq -1$$

On pose $x = 0$ et $y = 0$. Alors $f(x) = f(0) = 0$ et $f(xy) = f(0) = 0$, alors que $y \notin \{-1, 1\}$. Ainsi, non$S$ est vraie, donc S est $\boxed{\text{fausse}}$.

Exercice 2 : Raisonnements

1) On considère l'assertion $\quad P : \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad (ab > b^2) \implies (a > 0 \text{ ou } b < 0)$

/2 **a)** Écrire la négation de P.

On a

$$\text{non}P : \exists a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \qquad (ab > b^2) \text{ et } (a \leq 0 \text{ et } b \geq 0)$$

/6 **b)** En passant par la contraposée, déterminer si P est vraie.

Montrons que P est vraie. Par contraposée, on a

$$P \iff \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad (a \leq 0 \text{ et } b \geq 0) \implies (ab \leq b^2)$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $a \leq 0$ et $b \geq 0$. On a donc $ab \leq 0 \leq b^2$, d'où le résultat. Ainsi, P est $\boxed{\text{vraie}}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

/9 On pourra dans un premier temps exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a immédiatement

$$u_{n+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = u_n + (n+1)^3$$

Montrons le résultat par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1^3 = 1$ tandis que $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$, donc la propriété est vérifiée au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrons que $u_{n+1} =$

$\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. Par ce qui précède :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n+1)\right) \\ &= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\ &= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété au rang $n+1$.

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3) On pose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2} + 1$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} > v_n$.

/13

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$. On raisonne par récurrence double sur n.

- Pour $n = 0$, $v_1 = 1$ tandis que $v_0 = 0$, donc on a bien $v_1 > v_0$.
  Pour $n = 1$, $v_2 = \dfrac{v_1+v_0}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ tandis que $v_1 = 1$. On vérifie que $v_2 > v_1$.

  La propriété est donc vraie aux rangs 0 et 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $v_{n+1} > v_n$ et que $v_{n+2} > v_{n+1}$. Montrons que $v_{n+3} > v_{n+2}$. On a

$$\begin{aligned}v_{n+3} - v_{n+2} &= \frac{v_{n+2}+v_{n+1}}{2} + 1 - v_{n+2} \\ &= \frac{1}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_{n+2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{n+1}+v_n}{2} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{1}{4}v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{4}(v_{n+1} - v_n) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

  Or, comme $v_{n+1} > v_n$, on en déduit que $\frac{1}{4}v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n > 0$. Ainsi,

$$v_{n+3} - v_{n+2} \geq \frac{1}{2} > 0$$

  et de cela on déduit que $v_{n+3} > v_{n+2}$.
- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} > v_n$.

Exercice 3 : Équations fonctionnelles

1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$.

/7

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : soit f une fonction solution. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et en posant $y = 0$), on a :

$$\begin{aligned}& f(x \times 0) = f(x) + f(0) \\ \Longrightarrow\ & f(0) = f(x) + f(0) \\ \Longrightarrow\ & 0 = f(x)\end{aligned}$$

  On en déduit que f est la fonction nulle.
- Synthèse : vérifions si $f : x \mapsto 0$ est solution. On a trivialement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(xy) = 0 = f(x) + f(y)$$

  donc f est solution.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto 0\}}$.

/13 **2)** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : soit f une fonction solution. En posant $x = 0$ et $y = f(0)$, on en déduit

$$\begin{aligned} & f(f(0) - f(0)) = 2 - 0 - f(0) \\ \Longrightarrow\ & f(0) = 2 - f(0) \\ \Longrightarrow\ & f(0) = 1 \end{aligned}$$

  Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $y = f(x)$, on trouve

$$\begin{aligned} & f(f(x) - f(x)) = 2 - x - f(x) \\ \Longrightarrow\ & f(0) = 2 - x - f(x) \\ \Longrightarrow\ & f(x) = 2 - x - 1 = 1 - x \end{aligned}$$

  Ainsi, si f est solution, alors $f(x) = 1 - x$.

- Synthèse : on pose $f : x \mapsto 1 - x$. Vérifions si f est solution. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(y - f(x)) &= f(y - (1 - x)) \\ &= 1 - (y - (1 - x)) \\ &= 1 - y + 1 - x \\ &= 2 - x - y \end{aligned}$$

  donc f est solution.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto 1 - x\}}$.

Exercice 4 : Barre de Sheffer

On définit l'opérateur logique $\uparrow$, appelé *barre de Sheffer*, de la façon suivante : si P et Q sont deux assertions, on note $P \uparrow Q$ l'assertion "non(P et Q)". À l'aide des assertions P, Q et avec la barre de Sheffer comme unique opérateur logique, construire des assertions équivalentes à :

/4 **1)** non$P$

On a $P \uparrow P \iff \text{non}(P \text{ et } P)$. Or, il est évident que $(P \text{ et } P) \iff P$. Donc

$$\text{non}P \iff \text{non}(P \text{ et } P) \iff \boxed{P \uparrow P}$$

/7 **2)** P et Q

Puisque $P \uparrow Q \iff \text{non}(P \text{ et } Q)$, alors

$$\text{non}(P \uparrow Q) \iff \text{non}(\text{non}(P \text{ et } Q)) \iff P \text{ et } Q$$

Il reste à écrire non$(P \uparrow Q)$ avec uniquement la barre de Sheffer. Par la question précédente (en remplaçant P par $P \uparrow Q$), on a

$$\text{non}(P \uparrow Q) \iff (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

Ainsi,

$$P \text{ et } Q \iff \boxed{(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)}$$

/7 **3)** P ou Q

On remarque que

$$\begin{aligned} P \text{ ou } Q &\iff \text{non}(\ (\text{non}P) \text{ et } (\text{non}Q)\ ) \\ &\iff (\text{non}P) \uparrow (\text{non}Q) && \text{par définition de } \uparrow \\ &\iff \boxed{(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)} && \text{par la question 1} \end{aligned}$$

/7 **4)** $P \Longrightarrow Q$

Comme on a

$$\text{non}(P \Longrightarrow Q) \iff P \text{ et } \text{non}Q$$

On en déduit que

$$\text{non}(\text{non}(P \Longrightarrow Q)) \iff \text{non}(P \text{ et } \text{non}Q)$$

et par suite

$$\begin{aligned} P \Longrightarrow Q &\iff \text{non}(P \text{ et } \text{non}Q) \\ &\iff P \uparrow (\text{non}Q) \\ &\iff \boxed{P \uparrow (Q \uparrow Q)} && \text{par la question 1} \end{aligned}$$

/9 **5)** P xor Q, où "xor" désigne le "ou" *exclusif*.

P xor Q est vraie si et seulement si une et une seule des deux assertions P et Q est vraie. Cela signifie que

$$\begin{aligned} P \text{ xor } Q &\iff (P \text{ et } \text{non}Q) \text{ ou } (Q \text{ et } \text{non}P) \\ &\iff \text{non}(P \implies Q) \text{ ou } \text{non}(Q \implies P) \\ &\iff \text{non}\left((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\right) \\ &\iff (P \implies Q) \uparrow (Q \implies P) \\ &\iff \boxed{[P \uparrow (Q \uparrow Q)] \uparrow [Q \uparrow (P \uparrow P)]} \quad \text{par la question 4} \end{aligned}$$

Exercice bonus. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$

/20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ (une récurrence sur un nombre fini de valeurs pour k).

- Initialisation : vérifions la propriété pour $k = 1$. On a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

  d'où le résultat. Si $n = 1$, alors il n'y a plus rien à faire. Dans la suite, on supposera $n \geq 2$.

- Hérédité : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$.

  Montrons la propriété au rang $k+1$.

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right) \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(k + k^2 + \frac{k^2}{n}\right) \\ &\leq 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(k + k^2 + k\right) \qquad \text{car } k \leq n \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(k^2 + 2k\right) \\ &\leq 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(k^2 + 2k + 1\right) \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

  et donc on en déduit que la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a montré que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$